

Diplomhauptprüfung / Bachelor- bzw. Masterprüfung

"Nichtlineare Regelungssysteme"

02. September 2015

Lösungsblätter

Name: Masterlösung

Vorname:

Matrikelnummer:

e-mail:

Bitte tragen Sie gleich zu Beginn der Prüfung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf diesem Deckblatt ein.

Die Lösungen sowie der vollständige und nachvollziehbare Lösungsweg sind in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Nur diese werden bewertet. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug.

Bei Platzproblemen können die Rückseiten der Lösungsblätter benutzt oder zusätzliche Lösungsblätter angefordert werden. Eigenes Konzeptpapier ist nicht zugelassen und wird als unzulässiges Hilfsmittel bewertet.

Geben Sie am Ende der Prüfung alle zur Verfügung gestellten Lösungsblätter ab.

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Σ	

1. Aufgabe

1a) 3 Bereiche: $x > 0$; $x < -2$; $-2 \leq x \leq 0$
 $\rightarrow$ Kreis $\rightarrow$ Kreis $\rightarrow$ Hyperbel

I) $x > 0$: Kreis um $(0,0)$

$$x^2 + v^2 = c_1^2 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$2x\dot{x} + 2v\dot{v} = 0$$

$$2xv + 2vu = 0 \quad |:v \quad (v=0 \text{ trivial})$$

$$2x + 2u = 0$$

$$\Rightarrow u = -x = e \Rightarrow f(e) = e \quad \text{für } e < 0$$

II) $x < -2$ Kreis um $(-2,0)$

$$(x+2)^2 + v^2 = c_2^2$$

.... (vgl. I)

$$\Rightarrow u = f(e) = e - 2 \quad \text{für } e > 2$$

III) gegeben: $v^2 = (x+a)^2 + b$ für $-2 \leq x \leq 0$

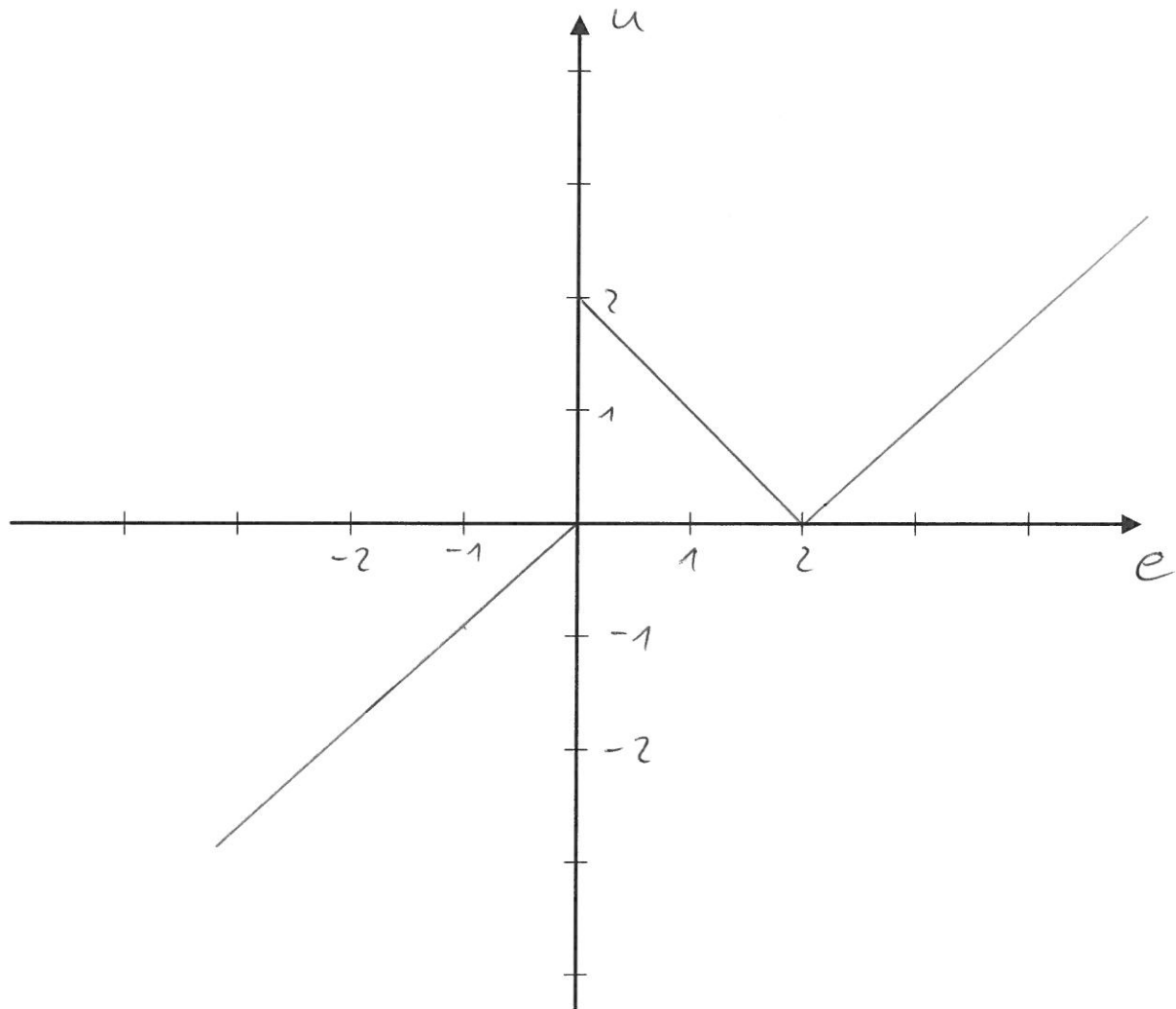
a direkt ablesbar (Scheitelpunkt): $a = 2$

$$v^2 = (x+2)^2 + b \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$2v\dot{v} = 2(x+2) \cdot \dot{x}$$

$$2vu = 2xv + 4v \quad |:2v$$

$$u = x+2 \Rightarrow f(e) = 2-e \quad \text{für } 2 \geq e \geq 0$$



1b)

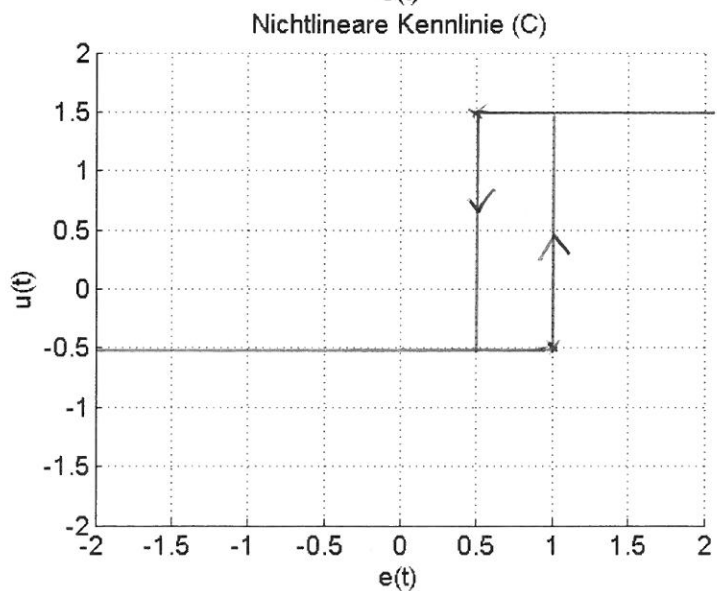
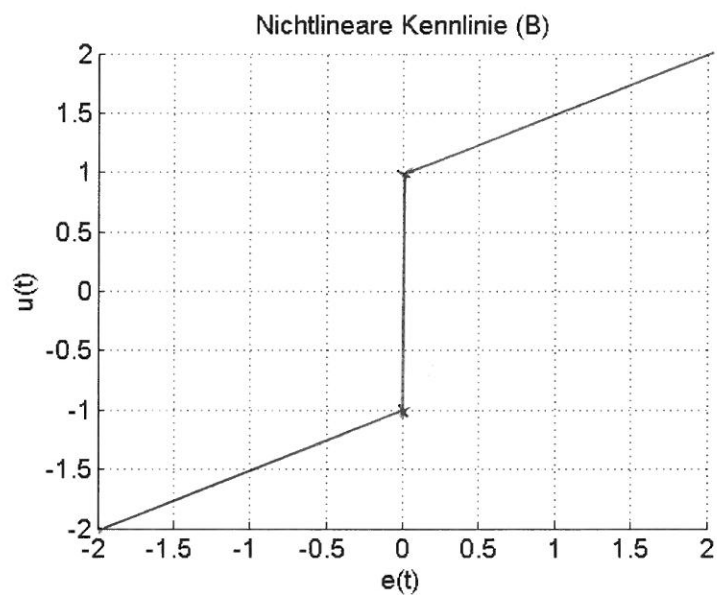
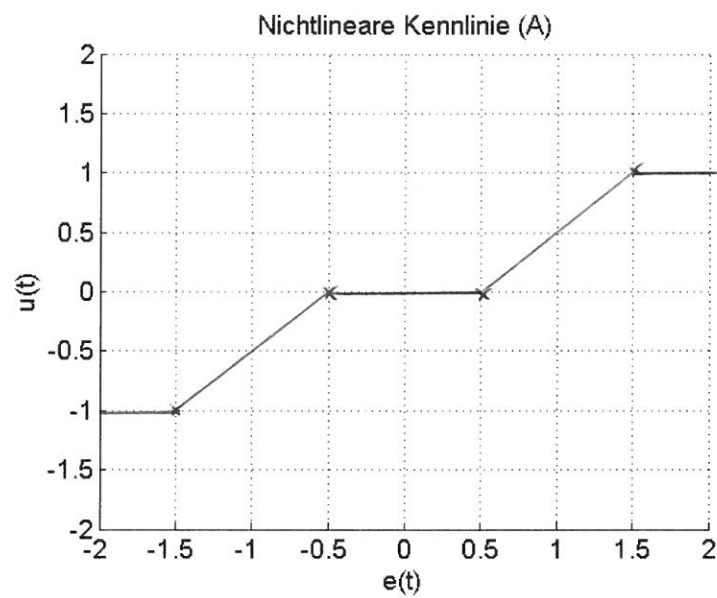
$$\text{Ruhelage: } \begin{aligned} \dot{x} &= v \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{v} &= u \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e = -x \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{oder} \quad e = -x = 2$$

$$\Rightarrow \underline{x}_{R1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_{R2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beide Ruhelagen stabil, aber nicht asymptotisch stabil, da bei kleinen Auslenkungen aus der/den Ruhelage(n) ballunstable Dauerschwingungen wie in Abb. 2 entstehen.

1c)



2. Aufgabe

2a)

I	HB nicht anwendbar, da $z_G > NG + 2$
II	HB anwendbar
III	HB anwendbar
IV	HB nicht anwendbar, da asymmetrisch

2b)

I	Popov anwendbar, da Vorzeichen „-“ von $L(s)$ in Kennlinie übertragen werden kann $\rightarrow$ Spiegelung
II	Sektorbedingung verletzt ($F(0) \neq 0$) $\rightarrow$ Popov nicht anwendbar
III	Singulärer Fall $\rightarrow$ Sektor $[\varepsilon, \kappa]$ betrachten $\rightarrow$ Sektorbed. verletzt $\rightarrow$ Popov nicht anwendbar
IV	Popov anwendbar

2c)

Systemordnung: $n=2$ ($f(\ddot{y}(t))$)

Am Ausgang ist „PT-1-Verhalten“ sichtbar, eine zweite Ableitung (ungeeigneter Verlust nach Sprung) ist nicht erkennbar! $\Rightarrow$ Nulldynamik muss 1. Ordnung sein!

2d)

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) \cdot (x_2^2 - \cos(x_1))$$

$$+ x_2 (-x_1 x_2 + e^{-x_2^2} (x_1 x_2 + x_2^3)) + \pi x_2$$

$$= \cancel{x_1 x_2^2} - \cancel{x_1 \cos(x_1)} - \frac{\pi}{2} x_2^2 + \frac{\pi}{2} \cos(x_1)$$

$$- \cancel{x_1 x_2^2} + e^{-x_2^2} x_1 x_2^2 + e^{-x_2^2} x_2^4 + \pi x_2^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - x_1 \right) \cdot \cos(x_1)}_{\Downarrow} + \frac{\pi}{2} x_2^2 + e^{-x_2^2} (x_1 x_2^2 + x_2^4)$$

$> 0 \quad > 0 \quad > 0 > 0 \quad > 0$

	$\frac{\pi}{2} - x_1$	$\cos(x_1)$
$x_1 > \frac{\pi}{2}$	< 0	< 0
$x_1 < \frac{\pi}{2}$	> 0	> 0

$$\left. \begin{array}{l} \text{Summe} \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) \text{ im Bereich um die Ruhelage } \left(\frac{\pi}{2} / 0 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{instabile Ruhelage}$$

3. Aufgabe

3a)

Kennlinie besteht aus Dreipunktglied ~~mit~~ und
lineares Kennlinie (negative Steigung)

$$N(A) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & A < 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{4}{A\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}}, & A \geq 1 \end{cases}$$

bzw.

$$N(A) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} (A^{-2} - A^{-4})^{\frac{1}{2}}$$

3b)

$$N(\sigma) = -\frac{1}{2}$$

für $A \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dN(A)}{dA} &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot (A^{-2} - A^{-4})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2A^{-3} + 4A^{-5}) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{4 \frac{1}{A^5} - 2 \frac{1}{A^3}}{\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^4}}} = \frac{4}{\pi} \frac{2 - A^2}{\sqrt{A^8 - A^6}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{A = \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$$N(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \stackrel{(\text{Hinweis})}{=} \frac{1}{6}$$

$$N(" \infty ") = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi \cdot " \infty "} \sqrt{1 - \frac{1}{" \infty ^2 "}} = -\frac{1}{2}$$

$N(A)$ startet also bei $-\frac{1}{2}$, steigt mit wachsendem A auf ca. $\frac{1}{6}$
und sinkt wieder auf $-\frac{1}{2}$ ab

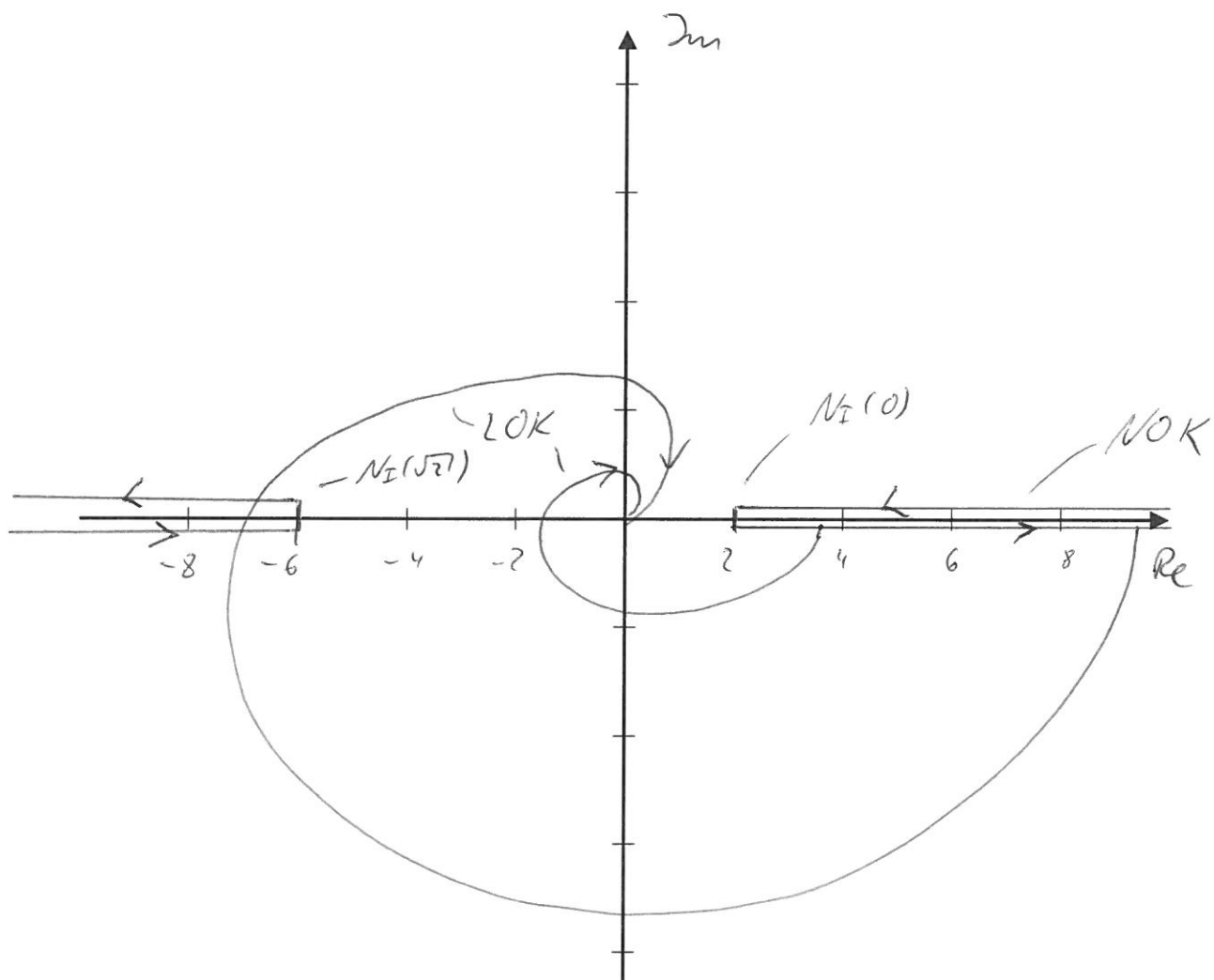
3c)

$N_I(A) = \frac{-1}{N(A)}$: Invertierung von $N(A)$ schwieriger, da laut b) $N(A)$ zwei Nulldurchgänge besitzt.

$$N_I(0) = 2$$

$$N_I(\sqrt{2}) = -6$$

$$N_I(\infty) = 2$$



4. Aufgabe

4a) $\underline{\dot{x}} = \underline{f}$ III) $x_1 = -x_2$
 II) $x_2 = -x_3$

in I) $3x_2^2 + 2x_2^3 + x_2 = 0 \quad | : x_2 \Rightarrow \underline{x}_{R1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 + 1 = 0$$

$$x_{R2,3,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_{R2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_{R3} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4b)

$$\underline{A} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \bigg|_{\underline{x} = \underline{x}_R} = \begin{pmatrix} -3x_{2R} & -3x_{1R} - 4x_{2R}x_{3R} & -2x_{2R}^2 - 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\underline{x}_{R2}$:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \cdot \underline{I} - \underline{A}) = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot \underline{I} - \underline{A}) = \lambda^3 \textcircled{-3} + 3\lambda \textcircled{-1} =$$

$\Rightarrow$ instabil und Hurwitz (oder EW bei $\lambda = 1$ raten)

oder für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & -1,5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \cdot \underline{I} - \underline{A}) = \begin{pmatrix} \lambda - 1,5 & 0,5 & 1,5 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot \underline{I} - \underline{A}) = \lambda^3 - 1,5 \lambda^2 + 0,5$$

↑ nach Horner auch instabil

$$4c) \quad \underline{L}^T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ k \cdot x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_B \underline{C}_1 = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ 2] \neq \underline{0}^T$$

$\Rightarrow \delta_1 = 1$

$$\underline{L}_B \underline{C}_2 = [0 \ 0 \ 2kx_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0] = \underline{0}^T$$

$$\underline{L}_A \underline{C}_2 = [0 \ 0 \ 2kx_3] \begin{bmatrix} \vdots \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = 2kx_1x_3 + 2kx_2x_3$$

$$\underline{L}_B \underline{L}_A \underline{C}_2 = [2kx_3 \ 2kx_3 \ 2kx_1 + 2kx_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [2kx_3 \ 4kx_3] \neq \underline{0}^T$$

für $x_3 \neq 0$

$$\Rightarrow \delta_2 = 2$$

$\Rightarrow$ volle Differenzordnung

$$\det D^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2k_{x3} & 4k_{x3} \end{vmatrix} = 4k_{x3} - 2 \cdot 2k_{x3} = 0$$

$\Rightarrow$ volle D.O., aber nicht vollständig entkoppelbar

4d) volle D.O., daher keine Nullstellen vorhanden

4e) System nach c) nicht entkoppelbar $\rightarrow$ Verfahren nach Falb-Wblowitz nicht anwendbar, da D^{*-1} nicht berechnet werden kann